Hoja 1 de Problemas
(Preliminares sobre estructuras algebraicas y análisis matricial)

Estructuras algebraicas

1. Estudiar si el producto cartesiano de conjuntos en conmutativo.

2. Describir el conjunto $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}$.

3. Demostrar que el conjunto $\mathbb{K} = \{a + b\,\mathtt{i} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, con la suma y multiplicación de los números complejos, tiene estructura de anillo conmutativo unitario. ¿Es un cuerpo?
   Obs. A este anillo se le llama anillo de los enteros gaussianos y se representa por $\mathbb{Z}[\,\mathtt{i}]$.

4. Demostrar que el conjunto $\mathbb{K} = \{a + b\,\mathtt{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, con la suma y multiplicación de los números complejos, tiene estructura de cuerpo.
   Obs. A este cuerpo se le llama cuerpo de los racionales gaussianos y se representa por $\mathbb{Q}[\,\mathtt{i}]$.

5. Justificar las tablas 1 y 2 del resumen de "Prelimimares sobre estructuras algebraicas".

6. Demostrar que la relación binaria $\equiv_m$ es una relación de equivalencia.

7. ¿Es $[10] = [3]$ en $\mathbb{Z}_7$?

8. Construir las tablas de sumar y multiplicar de $\mathbb{Z}_3$.

9. En $\mathbb{Z}_5$ determinar $([1] + [3]^3)/[2]$.

10. Obtener $[99]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{101}$, $[9]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{11}$ y $[8]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{13}$.

Análisis matricial

11. Sea A y B dos matrices cuadradas de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones

    (i) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
    (ii) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$
    (iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
    (iv) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$
    (v) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 - BA + AB$
    (vi) $AB = BA$
    (vii) Si $AB = \mathbf{0}$ entonces $A = \mathbf{0}$ o $B = \mathbf{0}$.
    (viii) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
    (ix) AA^T es simétrica.

12. Determinar las fórmulas del determinante de una matriz cuadrada de orden 1, 2 y 3.

13. Sea A una matriz invertible. Determinar el valor de $\det(A)$ en función del valor de $\det(A^{-1})$.

14. Sea A una matriz ortogonal. Obtener los posibles valores de $\det(A)$.

15. Sea A una matriz ortogonal. Demostrar que A es regular y que $A^T = A^{-1}$.

16. Demostrar que la matriz
$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$
es ortogonal.

17. Dos matrices A, B cuadradas $n \times n$, se llaman <u>semejantes</u> si existe una matriz regular P de orden $n \times n$ tal que $A = P^{-1}BP$. Demostrar que si A y B son semejantes, entonces $\det(A) = \det(B)$.

18. Dos matrices A, B cuadradas $n \times n$, se llaman <u>congruentes</u> si existe una matriz regular P de orden $n \times n$ tal que $A = P^T BP$. Demostrar que si A y B son congruentes, entonces $\det(A) = \det(P)^2 \det(B)$.

19. Calcular el determinante de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Calcular el determinante de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\alpha_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & n & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-t & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-t \end{pmatrix}$$

21. Se considera la matriz con elementos en $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide

a) $\det(A)$
b) Si A es invertible, obtener A^{-1}.
c) Descomposición $PA = LU$ de A.
d) Resolver, utilizando la factorización $PA = LU$, el sistema $AX = (2, 1, 0)^T$.

22. Se considera la matriz con elementos en $\mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [1] & [1] & [1] \\ [0] & [4] & [1] \end{pmatrix}$$

Se pide

a) $\det(A)$
b) Si A es invertible, obtener A^{-1}.
c) Descomposición $PA = LU$ de A.
d) Resolver, utilizando la factorización $PA = LU$, el sistema $AX = ([1], [1], [1])^T$.

23. Discutir el sistema siguiente según los valores del los parámetro $a \in \mathbb{R}$ y resolverlo cuando sea posible.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & -2 \\ ax + y + z & = & -2 \\ x + y + az & = & -2 \end{array} \right.$$